Списание „Математика, компютърни науки и образование“ Том 7, кн. 1, 2024
Journal of Mathematics, Computer Science and Education Vol. 7, No. 1, 2024

DOI: 10.54664/AYJS6812

ОПТИМАЛНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА РЕСУРС ПО КОНТУРА НА ОБЛАСТ НА ДВУМЕРНО БРАУНОВО ДВИЖЕНИЕ

Добромир Кралчев

OPTIMAL DISTRIBUTION OF A RESOURCE OVER THE BOUNDARYOF A REGION OF A TWO-DIMENSIONAL BROWNIAN MOTION

Dobromir Kralchev

Abstract: The probability of successfully intercepting a Brownian motion on the boundary of a plane region has been investigated. The probability has been represented as a function of the distribution of some resources over the boundary of the region. The optimal distribution of the resource has been found.
Keywords: Brownian motion, optimization.

ВЪВЕДЕНИЕ

Разглеждаме ограничена едносвързана област $D \subseteq \mathbb{R}^2$ с контур ∂D. Нека $\overline{D} = D \cup \partial D$ е затворената обвивка на D. В точка $(x_0, y_0) \in \overline{D}$ се появява обект и започва да се движи из областта D по случаен начин. Излизането му извън D е свързано с някаква опасност и се налага да бъде предотвратено. За целта върху контура на D е разположена защита, която трябва да прехване обекта в момента, в който той достигне ∂D. Ресурсите на защитата често са ограничени, затова възниква задачата за оптималното им разпределяне по контура. Предполагаме, че разпределението на ресурсите по контура не се мени с течение на времето. Това изискване възниква било от естеството на взаимодействието между обекта и защитата, било от малката гъвкавост на защитата.

Например D може да е някаква местност, а точката (x_0, y_0) да е малък район, където се е появила епидемия или е започнал пожар, или изобщо е възникнало нежелано явление, което има свойството да се разпространява. Целта на защитата е ограничаване на опасността в рамките на D. Идеалният вариант е разпределението на ресурсите да се мени според промените в ситуацията, но това често е невъзможно (например при липса на информация) или става толкова бавно, че разпределението може да се смята за постоянно.

В застрахователното дело е важно състоянието на някое застраховано лице или вещ. Състоянието се схваща в най-широк смисъл: здравословно състояние, професия на лицето, начин на употреба на вещта и др. (Състоянието може да се представя с повече координати, но за удобство разглеждаме двумерния случай.) От практиката знаем, че състоянието е добро само в някаква ограничена област („златната среда“), излизането от която може да се тълкува като настъпване на застрахователно събитие. Точките от контура на областта съответстват на различните рискове, покрити от застраховката. Ресурсите на защитата се разпределят със застрахователния договор, който не може да се променя, след като бъде сключен.

МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛ

Движението в областта D често е дифузионно и зависи от голям брой фактори. Подходящ модел на такива процеси е брауновото движение. По-нататък предполагаме, че в областта D се извършва брауново движение $\left(B_t\right)_{t \geq 0}$ без пренос, с независими компоненти с равни коефициенти на дифузия, $B_0 = \left(x_0, y_0\right)$. Нека τ е моментът на първото достигане на контура ∂D от движението $\left(B_t\right)_{t \geq 0}$; $B_\tau \in \partial D$ е точката на първото достигане на контура.

Защитата разполага с някакъв ресурс, разпределен по контура на D непрекъснато, с плътност $f : \partial D \to \left[0; +\infty\right]$, т.е. количеството ресурс върху коя да е дъга L от ∂D е равно на криволинейния интеграл от първи род $\int_L f\,\mathrm{ds}$. Ако общото количество е $h > 0$, то $\int_{\partial D} f\,\mathrm{ds} = h$.

В момента τ защитата в т. B_τ бива преодоляна или успешно отблъсква опасността. Вероятността на второто събитие е функция $\varphi : \partial D \to \left[0; 1\right]$; от практически съображения е ясно, че тя расте с увеличаването на плътността. Тази функция може да се избере различно, например $\varphi\left(x, y\right) = 1 - \exp\left(-f\left(x, y\right)\right)$, тоест $f\left(x, y\right) = -\ln\left(1 - \varphi\left(x, y\right)\right)$. Предполага се, че функциите f и φ са непрекъснати.

В ролята на начална точка $\left(x_0, y_0\right)$ може да се вземе произволна точка $\left(x, y\right) \in \overline{D}$. Полагаме $u\left(x, y\right) = \mathrm{E}_{x, y}\,\varphi\left(B_\tau\right)$; това е вероятността за успех при начална точка $\left(x, y\right)$. При фиксирана начална точка $\left(x, y\right) = \left(x_0, y_0\right)$ вероятността $u\left(x_0, y_0\right)$ е функционал от f. Търси се онази плътност f, за която функционалът $u\left(x_0, y_0\right)$ достига най-голяма стойност, при условие че $\int_{\partial D} f\,\mathrm{ds} = h$.

Формула за вероятността за успех

Функцията $u\left(x, y\right)$ удовлетворява следните условия (вж. напр. [1], глава 13):

$$\left| \begin{array}{ll} L\, u = 0 & D \\ u = \varphi & \text{върху } \partial D, \end{array} \right.$$

където L е пораждащият оператор на $\left(B_t\right)_{t \geq 0}$. От изискванията към процеса $\left(B_t\right)_{t \geq 0}$, поставени в модела по-горе, следва, че L е пропорционален на лапласиана $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Като съкратим коефициента на пропорционалност, получаваме задачата на Дирихле

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta\, u = 0 & D \\ u = \varphi & \text{върху } \partial D. \end{array} \right. \qquad (1)$$

Според теоремата на Риман за конформните изображения съществува конформнои взаимно еднозначно изображение на областта D върху отворения единичен кръг. Нека

$$\left| \begin{array}{l} x = x\ \left(x, y\right) \\ y = y\ \left(x, y\right) \end{array} \right. \qquad (2)$$

е продължение на споменатото изображение върху $\overline{D}$; с други думи, взаимно еднозначно и конформно изображение на $\overline{D}$ върху затворения единичен кръг.

Полагаме $u(x,\ y)\ =\ u(x,\ y),\ \varphi(x,\ y) = \varphi(x,\ y)$. Известно е (напр. [2], лекция 47), че всяка конформна смяна на променливите запазва оператора на Лаплас. Така се получава вътрешна задача на Дирихле за единичния кръг:

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{в отворения единичен кръг} \\ u = \varphi & \text{върху единичната повърхност} \end{array}\right. \tag{3}$$

Решението на тази задача, получено с функцията на Грийн и записано в полярни координати, тоест $x = \rho.\cos\psi$, $y = \rho.\sin\psi$, $u\ (x, y) = u(\rho, \psi)$, $\varphi\ (x, y) = \varphi\ (\psi)$, изглежда така:

$$u\ (\rho,\psi) = \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi\ (\theta)}{1+\rho^2 - 2\rho.\cos.\ (\theta-\psi\ )}\, d\theta, \quad 0 \le \rho < 1, \quad -\pi \le \psi < \pi. \tag{4}$$

Тази формула дава в явен вид решението на задачата , откъдето се получава решението на оригиналната задача , като се отчетат извършените смени на променливите.

Решение на оптимизационната задача

Дадена е произволна, но фиксирана допустима точка $(x,\ y)$. Целта е да се максимизира вероятността $u(x,\ y)$ чрез избор на подходяща плътност f на разпределението на ресурса. Тази задача е равносилна на максимизирането на $u\ (\rho, \psi)$ чрез подходящ избор на φ

В условието за ограниченост на ресурса $\int_{\partial D} f\,\mathrm{ds} = h$, тоест $\int_{\partial D} \ln\left(1-\varphi(x,\ y)\right)\mathrm{ds} = -h$, извършваме конформната смяна на променливи и отчитайки условията на Коши — Риман, записваме ограничението на ресурса във вида $\int_{x^2+y^2=1} \ln\left(1-\varphi(x,\ y)\right)\sqrt{J(x,\ y)}\ \mathrm{ds} = -h$;

тук J е якобианът на обратното преобразуване. Параметризираме единичната окръжност:

$$\left|\begin{array}{l} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{array}\right., \quad -\pi \le \theta < \pi;$$

полагаме $g(\theta) = \sqrt{J(\cos\theta,\ \sin\theta)}$ и условието за ограниченост на ресурсите добива вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta).\ln\left(1-\varphi(\theta)\right)d\theta = -\ h\ . \tag{5}$$

И така, дадени са числа $h > 0$, $\rho \in [0;1)$, $\psi \in [-\pi;\ \pi)$ и 2p-периодична функция $g \ge 0$, зависеща само от *D*. Търси се 2p-периодична функция $\varphi : \mathbb{R} \to [0;1]$, за която $u\ (\rho, \psi)$, зададена с формула (4), достига максимум при условието (5) за общото количество ресурс.

Това е изопериметрична задача, която може да бъде решена посредством методите на вариационното смятане. Неизвестната функция φ удовлетворява уравнението на Ойлер за функционала $\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\varphi(\theta)}{1+\rho^2-2\rho.\cos(\theta-\psi)}+\lambda.g(\theta).\ln\big(1-\varphi(\theta)\big)\right]d\theta$, тоест

$$\frac{1}{1+\rho^2-2\rho.\cos(\theta-\psi)}-\frac{\lambda.g(\theta)}{1-\varphi(\theta)}=0,$$

където λ е множител на Лагранж. Решението на това уравнение е функцията

$$\bar{\varphi}(\theta)=1-\lambda.g(\theta).\left[1+\rho^2-2\rho.\cos(\theta-\psi)\right], \tag{6}$$

а като заместим в , получаваме за λ уравнението

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta).\ln\left\{\lambda.g(\theta).\left[1+\rho^2-2\rho.\cos(\theta-\psi)\right]\right\}d\theta=-h,$$

което се преобразува до

$$(\ln\lambda).\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\,d\theta+\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta).\ln\left\{g(\theta).\left[1+\rho^2-2\rho.\cos(\theta-\psi)\right]\right\}d\theta=-h,$$

откъдето намираме

$$\lambda=\exp\left[\frac{-h-\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta).\ln\left\{g(\theta).\left[1+\rho^2-2\rho.\cos(\theta-\psi)\right]\right\}d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\,d\theta}\right] \tag{7}$$

Формулите и дават решението на задачата за максимизирането на функционала от формула при условието за ограниченост на ресурса. Като се отчетат извършените смени на променливите, се получава оптималната плътност f.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

След заместването на (7) в (6), което пропускаме само с цел четимост, се получава явна формула за оптимизационната задача за прехващане на двумерно брауново движение по контура на равнинна област. Така получената формула се отнася обаче за общото решение на оптимизационната задача. При всяко прилагане на общата формула към конкретни данни могат да възникнат затруднения, чието решаване обикновено изисква анализ на данните.

На първо място, не съществува универсален метод за намиране на взаимно еднозначно и конформно изображение на ограничена едносвързана равнинна област в единичния кръг.

Липсата на такъв метод обаче не представлява съществена трудност, тъй като се възпълва от известните решения на множество частни случаи. Цитираната лекция 47 от [2] показва примери за намиране на конформни изображения в някои типични случаи, а за изчерпателно разглеждане на темата препраща читателя към справочници за конформни изображения и посочва някои такива справочници. В действителност постъпковото сглобяване на търсеното изображение от по-прости изображения, всяко от които опростява границата на областта, е известен метод , който, при все че изисква досещане, е лесен за прилагане и дори е залегнал в университетските курсове по комплексен анализ (теория на аналитичните функции).

Пресмятането на определените интеграли в и също може да породи трудности. Примитивните на подинтегралните функции често са специални, а не елементарни функции. Множеството справочници за специални функции, определени и неопределени интеграли облекчават значително пресмятанията. От приложна гледна точка често се оказва достатъчно да се намери приблизителен резултат, което е постижимо с помощта на числено интегриране. Изборът на квадратурна формула би могъл да зависи от вида на подинтегралните функции, следователно от конкретната приложна област.

ЛИТЕРАТУРА

[1] **Вентцель, А. 1975.** Курс теории случайных процессов. *„Наука“*, Москва. // **Wentzell, A. 1975.** A course in the theory of random processes. *„Nauka“*, Moscow.)

[2] **Фарлоу, С. 1985.** Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. *„Мир“*, Москва. // Прев. от английски: Farlow, S. 1982. Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. *„John Wiley & Sons, Inc.“*)

ИНФОРМАЦИЯ ЗА АВТОРА

Гл. ас. д-р Добромир Кралчев: Софийски университет „Св. Климент Охридски“, ФМИ;
електронна поща: kralchev@fmi.uni-sofia.bg , dobromir_kralchev@abv.bg .

ABOUT THE AUTHOR

Assist. prof. Dobromir Kralchev, PhD: Sofia University „St. Kliment Ohridski“, FMI;
e-mail: kralchev@fmi.uni-sofia.bg, dobromir_kralchev@abv.bg.