Списание „Математика, компютърни науки и образование“ Том 7, кн. 1, 2024
Journal of Mathematics, Computer Science and Education Vol. 7, No. 1, 2024

DOI: 10.54664/MGNW7160

# ПРИЛОЖЕНИЕ НА ФОРМУЛАТА НА СИМПСЪН В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА ЗА НАМИРАНЕ НА ОБЕМ НА РОТАЦИОННИ ТЕЛАИ МНОГОСТЕНИ

Росен Ангелов

# APPLICATION OF SIMPSON'S RULE IN MATHEMATICS EDUCATION FOR FINDING THE VOLUME OF SOLIDS OF REVOLUTION AND POLYHEDRA

Rosen Angelov

**Abstract:** Very often at school or university it is necessary to solve stereometric problems related to finding the volume of a body. Depending on the shape of the body, this can be a difficult task. To overcome this difficulty, it can be used Simpson's rule (prismoidal formula). The prismoidal formula is basically Simpson's rule and it is obtained by integrating the area parallel to the two planes of vertices. This formula can be used in finding and calculating the volume of polyhedral and solids of rotation - pyramids, prisms, parallelepipeds, wedges, cupolaes, antiprisms, cones, cylinders, spheres, etc.
**Keywords:** volume, prismatoid, Simpson‘s rule, prismoidal formula.

## ВЪВЕДЕНИЕ

Намирането на обем на дадено тяло е важен аспект в математиката, физиката, химията и други природни и технически науки. Той може да се изчисли по различни начини и методи в зависимост от формата и характеристиките на тялото. Тези методи могат да бъдат: аналитични, геометрични, експериментални, моделиране и симулации [1,2].

Чрез формулата на Симпсън или наричана още призмоидална формула може да се пресмята лесно обем на ротационни тела и многостени. Тя може да бъде успешно използвана в обучението по математика, както на ученици със засилено изучаване на математика и на тези в профилирана подготовка, така и на студенти за намирането на обем на ротационни тела и многостени.

## ОБЕМИ НА НЯКОИ ГЕОМЕТРИЧНИ ТЕЛА И ФОРМУЛА НА СИМПСЪН

В работата са изведени формули за обем на някои геометрични тела и са решени примерни задачи.

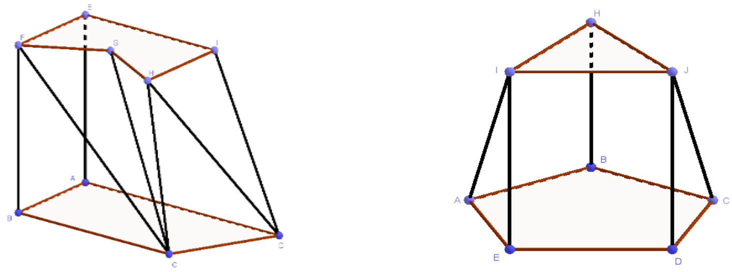
Формула на Симпсън (Simpson’s rule).

При решаването на задачи за намиране на обем се използва следното представяне на формулата на Симпсън: $V = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3)$ ,

където $V$ –обем на търсеното тяло, $h$ – височина на тялото, $B_1$ и $B_3$ са лица на успоредни основи, $B_2$ –лице на средната основа [1].

***Призматоид***

*Дефиниция.* Призматоидът е многостен, чиито основи са многоъгълници в две успоредни равнини и върховете на които лежат в тези равнини (фиг. 1).



**Фигура 1.** *Видове призматоиди*

Даден е призматоид ABCDEFG (фиг. 2).

$B_1$ е лицето на четириъгълника $DEFG$, $B_3$ е лицето на триъгълника $ABC$,

$B_2$ − лицето на средното сечение и $h$ е височината на призматоида.

Да се докаже: $V = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3)$.

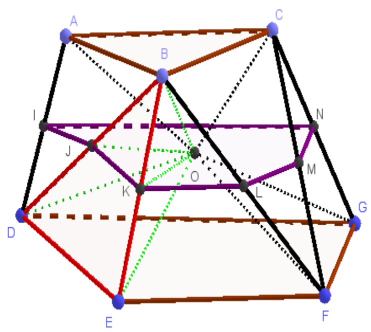
Доказателство: Избира се произволна точка $O$ от средното сечение $IJKLMN$ [3]. Така многостенът се разделя на две пирамиди $OABC$ и $ODEFG$ и няколко пирамиди, чиито основи са останалите му стени. Тогава за обема на пирамидата $OABC$ се получава $V_{OABC} = \frac{1}{3}B_3.\frac{h}{2} = \frac{1}{6}B_3h$ и за обема на пирамидата $ODEFG$, $V_{ODEFG} = \frac{1}{3}B_1\frac{h}{2} = \frac{1}{6}B_1h$.

Намира се обемът на пирамидата $OBDE$. Тъй като $S_{BJK} = \frac{1}{4}S_{BDE}$ ,то за обемите $OBJK$ и $OBDE$ следва $V_{OBJK} = \frac{1}{4}V_{OBDE}, V_{OBJK} = \frac{1}{3}\frac{h}{2}S_{OJK} = \frac{1}{6}S_{OJK}h$.

Тогава обемът на $V_{OBDE} = 4V_{OBJK} = 4\frac{1}{6}S_{OJK}h = \frac{4}{6}hS_{OJK}$. Аналогично обемите на другите пирамиди са лицето на всяка основа умножено по $\frac{4}{6}h$. Като се сумират обемите на пирамидите $V_{OABC}, V_{ODEFG}$ и на останалите получаваме

$$V = \frac{1}{6}B_1h + \frac{4}{6}B_2h + \frac{1}{6}B_3h,$$

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3)$$




**Фигура 2.** *Призматоид*

***Прав кръгов пресечен конус***

Даден е прав кръгов пресечен конус (фиг. 3) с долна основа $B_1$ с радиус $r_1$ и горна основа $B_3$ с радиус $r_3$ и височина $h$. Да се намери обемът на конуса.

Примерно решение:

С $B_2$ се означава средната основа. Намира се лицето на основата $B_1 = \pi.r_1^2$, $B_3 = \pi.r_3^2$

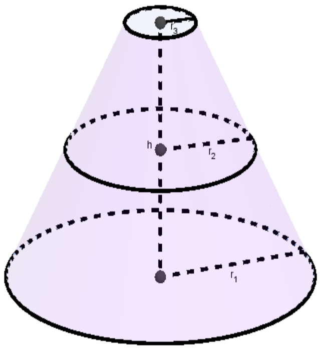
$$B_2 = \pi\left(\frac{r_1 + r_3}{2}\right)^2$$

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3) = \frac{h}{6}\left(\pi.r_1^2 + 4\pi\left(\frac{r_1+r_3}{2}\right)^2 + \pi.r_3^2\right) =$$

$$\frac{h}{6}\left(\pi.r_1^2 + 4\pi\frac{r_1^2 + r_3^2 + 2r_1.r_3}{4} + \pi.r_3^2\right) = \frac{h}{6}(\pi.r_1^2 + \pi(r_1^2 + r_3^2 + 2r_1.r_3) + \pi.r_3^2) =$$

$$\frac{h}{6}(\pi.(r_1^2 + r_1^2 + r_3^2 + 2r_1.r_3 + r_3^2)) = \frac{h}{6}\pi(2r_1^2 + 2r_3^2 + 2r_1.r_3)$$

V= $\frac{h}{3}\pi(r_1^2 + r_3^2 + r_1.r_3)$



**Фигура 3.** *Прав кръгов пресечен конус*

***Октаедър***

Даден е правилен октаедър (фиг. 4). Нека основният ръб е $a$, а височината е $h$. Да се намери обема на октаедъра.

Примерно решение:

Средната основа на октаедъра е квадрат. Намира се лицето $B_2 = a^2$.

Разглежда се $\Delta AOH$ − правоъгълен триъгълник ($\measuredangle HOA = 90°$).

По Питагорова теорема $\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$, но $d = a\sqrt{2}$, тогава

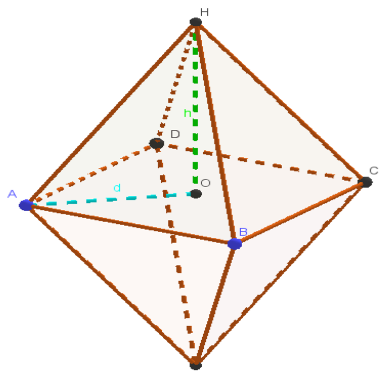
$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{2a^2}{4} = \frac{4a^2 - 2a^2}{4}$$

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3) = \frac{a\sqrt{2}}{6.2}(0 + 4a^2 + 0) = \frac{a\sqrt{2}}{12}.4a^2$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$




**Фигура 4.** *Октаедър*

***Кълбов сегмент***

Дадено е кълбо (фиг. 5) с радиус $r$ и височина $h$ на сегмента.

Да се намери обемът на кълбовия сегмент.

Примерно решение:

С $B_1$, $B_2$, $B_3$ означаваме съответно долната, средната и горната основа на сегмента и с $r_1$ радиуса на долната основа. Разглежда се $\Delta OAO_1$.

По Питагорова теорема се получава последователно

$$r_1^2 = r^2 - OO_1^2 = r^2 - (r-h)^2 =$$

$$r^2 - (r^2 + h^2 - 2rh) = r^2 - r^2 - h^2 + 2rh = (2rh - h^2)$$

$$r_{\text{ср}}^2 = r^2 - \left(r - \frac{h}{2}\right)^2 = r^2 - \left(r^2 + \frac{h^2}{4} - \frac{2rh}{2}\right) = r^2 - r^2 - \frac{h^2}{4} + \frac{2rh}{2} = rh - \frac{h^2}{4}$$

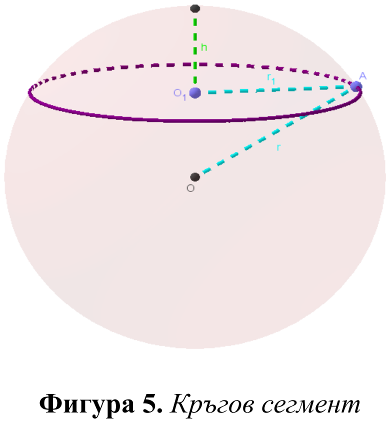
$$B_2 = \pi . r_{\text{ср}}^2 = \pi . \left(rh - \frac{h^2}{4}\right)$$

$$B_3 = 0$$

$$V = \frac{h}{6}\left(\pi(2rh - h^2) + 4\pi\left(rh - \frac{h^2}{4}\right)\right) = \frac{h}{6}\pi\big((2rh - h^2) + (4rh - h^2)\big)$$

$$= \frac{h}{6}\pi(2rh - h^2 + 4rh - h^2) = \frac{h}{6}\pi(6rh - 2h^2)$$

$$V = \frac{\pi h^2(3r - h)}{3}$$




**Фигура 5.** *Кръгов сегмент*

## Задачи

**Задача 1**. Даден е призматоид (фиг. 6) с основа $ABC -$ правоъгълен триъгълник и основа $DEFG -$ правоъгълник. Равнините на $\Delta ABC$ и $DEFG$ са успоредни по между си.

$\angle B = \angle D = \angle E = 90^\circ$, а $\angle EFC = 30^\circ$. $AB = 8, BC = 6$ и $CE = 10$.

Примерно решение:

Означава се с $B_1$ основата $ABC$, $B_2$ средната основа $B_3$ основата $DEFG$

$$B_1 = \frac{AB.BC}{2} = \frac{8.6}{2} = 24 \text{ кв.м.ед.}$$

Разглежда се $\Delta ABC$ $(\angle B = 90^\circ)$

По Питагорова теорема се намира

$AC^2 = AB^2 + BC^2,\ AC^2 = 8^2 + 6^2,\ AC^2 = 64 + 36,\ AC^2 = 100,\ AC = 10$

Разглежда се $\Delta CIH(\angle H = 90^\circ)$.

$$\sin\varepsilon = \frac{HC}{IC},\ sin30^\circ = \frac{5}{IC},\ \frac{1}{2} = \frac{5}{IC},\ IC = 10 \Rightarrow FC = 20$$

По Питагорова теорема за $\Delta FEC$,

$FE^2 + CE^2 = FC^2,\ FE^2 = 20^2 - 10^2,\ FE^2 = 400 - 100,\ FE^2 = 300,\ FE = 10\sqrt{3}$

$$HI = \frac{1}{2}FE = \frac{1}{2}10\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$HI = 5\sqrt{3}$

Разглежда се четириъгълника $EDBC$ , който е правоъгълник $HJ = 6$

В четириъгълника $BDGA$ се построява височината $AL$. Тогава в триъгълника $ALG(\angle \mathrm{L} = 90^\circ)$.

$GD = FE = 10\sqrt{3},\ LD = AB = 8,$

$$KJ = \frac{GD + AB}{2} = \frac{10\sqrt{3} + 8}{2} = 12{,}66$$

$KJ = 12{,}66$

Разглежда се $\Delta GAF(\angle \mathrm{G} = 90^\circ)$, $\angle \mathrm{G} = 90^\circ$ от Теоремата за трите перпендикуляра

$$KN = \frac{1}{2}GF = \frac{1}{2}.6 = 3$$

$KN = 3$

Разглежда се $\Delta AFC$ $NI = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}.10 = 5$

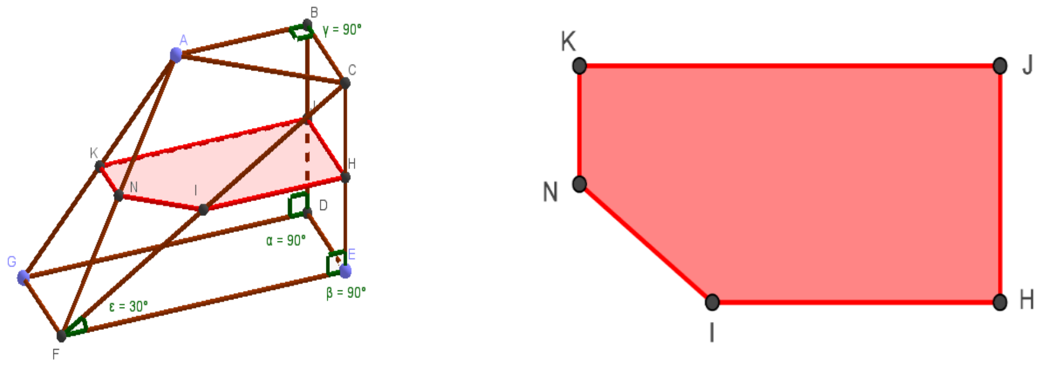
$NI = 5$

$B_3 = ED.EF = 6.10\sqrt{3} = 60\sqrt{3}$ кв.м.ед.

$$B_2 = B_{\text{прав.}} + B_{\text{трап.}} = 6.5\sqrt{3} = 30\sqrt{3} + \frac{(3+6).4}{2} = 30\sqrt{3} + 18 \text{ кв. м. ед.}$$

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3) = \frac{10}{6}\left(24 + 4.\left(30\sqrt{3} + 18\right) + 60\sqrt{3}\right) = 160 + 300\sqrt{3} \text{ куб. м. ед.}$$

$$V = 160 + 300\sqrt{3} \text{ куб. м. ед.}$$




**Фигура 6.**

**Задача 2.** Височината $SH$ на триъгълната пирамида $SABC$(фиг. 7) пресича средата $AB$ на равностранния триъгълник $ABC$ като $AB = 6$. Намерете обема на пирамидата, ако $SC = \sqrt{30}$.

Примерно решение:

Разглежда се $\Delta ABC$. $CH$ е височина в $\Delta ABC$. От това следва, че $CH = \frac{\sqrt{3}.AB}{2} = \frac{\sqrt{3}.6}{2} = 3\sqrt{3}$.

$SH$– височина на пирамидата $SABC$ и $\angle CHS = 90°$, то $\Delta SHC$ е правоъгълен триъгълник.

По Питагорова теорема за $\Delta SHC$ получаваме

$$SH^2 = SC^2 - CH^2 = \left(\sqrt{30}\right)^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 30 - 27 = 3, \; SH = \sqrt{3}$$

С $B_1$ се означава лицето на основата $\Delta ABC$ на пирамидата.

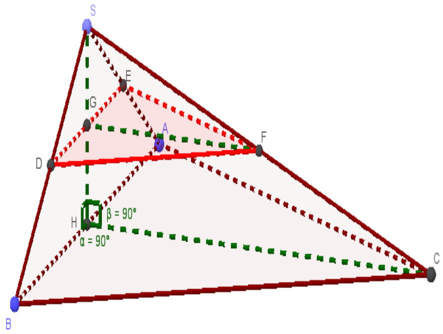
Намира се $B_1 = \frac{CH.AB}{2} = \frac{3\sqrt{3}.6}{2} = 9\sqrt{3}$ кв. м. ед.

С $B_2$ се означава лицето на средната основа на пирамидата.

Намира се $B_2 = \frac{\frac{FG.DE}{2}}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}.3}{2}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ кв. м. ед.

Лицето на $B_3 = 0$, т.к. това е върхът $S$ на пирамидата. Окончателно се получава

$$V = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(9\sqrt{3} + 4\frac{9\sqrt{3}}{4} + 0\right) = \frac{\sqrt{3}.18\sqrt{3}}{6} = 9 \text{ куб.м. ед.}$$




**Фигура 7.**

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Едно от предимствата на формулата на Симпсън (Призмоидална формула), е че дори да не се знае или не се помни някоя от формулите за обем на геометрично тяло, тя е достатъчна, за да се изчисли обема на даденото тяло. Друго предимство, е това, че въпреки че не се изучава в училищния курс геометричното тяло призматоид, то успешно може да бъде разглеждано в часовете, като се решават различни по сложност задачи, свързани с него.

### ЛИТЕРАТУРА

[1] **C. Alsina,** 2015. C. Alsina and R. B. Nelsen, A mathematical space Odyssey, The Dolciani Mathematical Expositions, vol. 50, *Solid geometry in the 21st century*, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2015.

[2] **Hall, Wm. S.** 1893. *Mensuration*. Ginn & Company. Boston. U.S.A.

[3] **W. S. Kern and J. R. Bland's.** 1938. Solid Mensuration.

**ИНФОРМАЦИЯ ЗА АВТОРА**
**Росен Ангелов**, асистент, докторант, специалност
„Методика на обучението по математика“ Факултет „Математика и информатика“,
Великотърновски университет „Св. св. Кирил и Методий“,
e-mail: r.angelov@ts.uni-vt.bg

**ABOUT THE AUTHOR**
**Rosen Angelov**, Assistant, PhD student in Methodology
of Mathematics Education, Faculty of Mathematics and Informatics, ”St. Cyril and St. Methodius”
University of Veliko Tarnovo, e-mail: r.angelov@ts.uni-vt.bg